



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Matematika II

Matemáticas II

EAU 2023 USE

www.ehu.es





Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinanteen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.



Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



LEHEN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A1 Ariketa

Izan bedi honako ekuazio linealetako sistema hau:

$$\begin{cases} 3x + y + \alpha z = 0, \\ 2x + \alpha y + z = 1, \\ 3x + \alpha y + z = \alpha - 1. \end{cases}$$

Eztabaidatu haren bateragarritasuna α parametroaren balioen arabera.

Ebatzi sistema $\alpha = 0$ kasurako, ahal bada.

B1 Ariketa

Kalkulatu honako bi berdintza hauek betetzen dituzten A eta B matrizeak:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$
$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

BIGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A2 Ariketa

Izan bitez r zuzena eta π plano. $P(1, -1, 2)$ puntuan perpendikularki elkar ebakitzen dutenak. Baldin eta π plano $Q(1, 2, 3)$ puntutik pasatzen bada eta $(0, 0, 2)$ bektorea barne badu, kalkulatu r zuzenaren eta π planoaren ekuazioak.

B2 Ariketa

Honako ekuazio hauek duten hiru planoak hartzen dira:

$$\pi_1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2, \quad \pi_2 \equiv x - y - z = 2 \quad \text{eta} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = b.$$

Existitzen al da a eta b parametroen baliorik zeinetarako hiru planoek zuzen batean elkar ebakitzen duten? Erantzuna ezezkoa bada, arrazoitu. Erantzuna baiezkoa bada, kalkulatu balio horiek.



HIRUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Aztertu f -ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, kalkulatu haren asintotak, eta aurkitu f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzeailea $x = 0$ abszisa duen puntuan. Egin f funtzioaren grafikoaren gutxi gorabeherako irudikapena.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Aurkitu A , B eta C parametroen balioak $f(0) = 2$ izan dadin, f -ren grafikoaren zuzen ukitzeaileak $x = 1$ eta $x = 3$ abszisa duten puntuetan paraleloak izan daitezen, eta f -k mutur erlatiboa izan dezan $x = -1$ puntuan. Mutur erlatibo hori maximoa ala minimoa da? Aztertu f -k beste mutur erlatiborik al duen eta zehaztu maximoak edo minimoak diren.

LAUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A4 Ariketa

Kalkulatu $\int (x^2 + 1)e^{x+1} dx$, eta azaldu kalkulurako erabilitako metodoa.

B4 Ariketa

Marratzu $y = 2x^2 - 4x + 3$ eta $y = x^2 - 2x + 3$ ekuazioetako parabolek mugatzen duten eremua, eta kalkulatu eremu horren azalera.



BOSGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A5 Ariketa

Bi dado ditugu, bata normala eta bestea trukatua. Trukatuan bata 4 aldiz dago, eta bia, 2 aldiz. Dado bat ausaz aukeratzen da, eta bitan jaurtitzen da.

- a) Zein da lehen jaurtiketan 1 zenbakia eta bigarrenetan 2 zenbakia lortzeko probabilitatea?
- b) Lehenengo jaurtiketaren emaitza 1 zenbakia eta bigarrenarena 2 zenbakia izan direla jakinik, kalkulatu dado trukatua hautatua izateko probabilitatea.

B5 Ariketa

Mahai baten gainean 500 txanpon dituen kutxa bat hustu da, Kalkulatu

- a) aurki kopurua 240 baino handiagoa izateko probabilitatea;
- b) aurki kopurua 230 baino txikiagoa izateko probabilitatea;
- c) aurki kopurua 230 eta 240 bitartean (biak barne) egoteko probabilitatea.



PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Se considera el sistema de ecuaciones lineales que sigue:

$$\begin{cases} 3x + y + \alpha z = 0, \\ 2x + \alpha y + z = 1, \\ 3x + \alpha y + z = \alpha - 1. \end{cases}$$

Discute su compatibilidad en función de los valores del parámetro α .

Resuelve el sistema para $\alpha = 0$, si es posible.

Ejercicio B1

Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$
$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sean la recta r y el plano π , que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1, -1, 2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1, 2, 3)$ y contiene al vector $(0, 0, 2)$, calcula las ecuaciones de la recta r y del plano π .

Ejercicio B2

Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2, \quad \pi_2 \equiv x - y - z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = b.$$

¿Existen valores de los parámetros a y b para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala. En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.



TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función f .

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros A , B y C para que $f(0) = 2$, las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas y f tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si f tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int (x^2 + 1)e^{x+1} dx$, explicando el método utilizado.

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = 2x^2 - 4x + 3$ e $y = x^2 - 2x + 3$ y calcula el área de ese recinto.



QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?
- b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

Ejercicio B5

Una caja que contiene 500 monedas es vaciada sobre una mesa. Halla

- a) la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 240;
- b) la probabilidad de que el número de caras sea menor que 230;
- c) la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 230 y 240, ambos incluidos.